Semaine 13

Partie n°1: Applications numériques

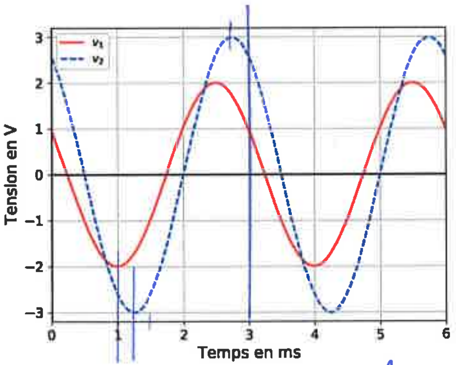
Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $U = E\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$ où $E = 20$ V, $\tau = 1$ ms et $t_1 = 3$ ms.
- $t_2 = \tau \ln\left(-\dfrac{U_2}{E}\right)$ où $U_2 = 5$ V, $E = 10$ V et $\tau = 10$ ms.

$U = 20(1 - e^{-3}) = 20 \times 0{,}95$ $\quad$ $\underline{U = 19\text{ V}}$

$t_2 = -10 \ln\left(\dfrac{+5}{10}\right) = 10 \ln 2$ $\quad$ $\underline{t_2 \simeq 7\text{ ms}}$

Partie n°2: Signaux sinusoïdaux



On considère les 2 tensions sinusoïdales représentées ci-contre.

1. Pour chaque signal relever l'amplitude, la période, la fréquence.

2. La tension v_2 est-elle en avance ou en retard par rapport à la tension v_1 ? Calculer le déphasage $\varphi_{2/1}$.

3. Pour chaque signal calculer la phase à l'origine. Vérifier la cohérence des résultats avec la question précédente.

4. Indiquer la forme analytique de chaque signal.

1 $\quad T = 3$ ms $\quad f = 3{,}3 \cdot 10^2$ Hz

$V_1 = 2$ V $\quad V_2 = 3$ V

2 $\quad v_2$ est en retard sur v_1.

$\Delta t = 0{,}25$ ms $\quad |\varphi_{2/1}| = 2\pi \times \dfrac{0{,}25}{3} = 2\pi \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{6}$

$\varphi_{2/1} = -\dfrac{\pi}{6}$ $\quad \varphi_{2/1} = -0{,}5$ rad

$\varphi_1 = \frac{\Delta t_1}{T} \times 2\pi = \frac{0,5}{3} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$

$\varphi_2 = \frac{0,25}{3} \times 2\pi = \frac{\pi}{6}$ $\quad \underline{\varphi_2 = \pi/6}$

$\underline{\varphi_1 = \frac{\pi}{3}}$

$\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$

$\boxed{v_1 = V_1 \cos(2\pi f t + \varphi_1)}$ $\quad \boxed{v_2 = V_2 \cos(2\pi f t + \varphi_2)}$

Partie n°3: Nombres complexes

5. Identifier la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants (U_m et φ sont 2 réels) :

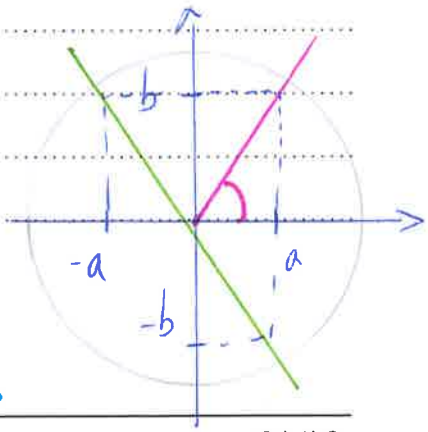
◇ $\underline{z_1} = 2 + 3j$, ◇ $\underline{z_2} = \frac{1}{j}$, ◇ $\underline{z_3} = U_m e^{j\varphi}$, ◇ $\underline{z_4} = -e^{j\pi/2}$,

* $Re(\underline{z_1}) = 2$ $\quad Im(\underline{z_1}) = 3$
* $\underline{z_2} = 1/j = \frac{j}{j^2} = -j$ $\quad Re(\underline{z_2}) = 0$ $\quad Im(\underline{z_2}) = -1$
* $\underline{z_3} = U_m \cos\varphi + j U_m \sin\varphi$ $\quad Re(\underline{z_3}) = U_m \cos\varphi$ $\quad Im(\underline{z_3}) = U_m \sin\varphi$
* $\underline{z_4} = -\cos(\pi/2) - j\sin(\frac{\pi}{2}) = -j$ $\quad Re(\underline{z_4}) = 0$ $\quad Im(\underline{z_4}) = -1$

6. Exprimer le module et l'argument des nombres complexes suivants (a et b sont deux réels positifs) :

◇ $\underline{z_1} = a + jb$, ◇ $\underline{z_2} = -a + jb$, ◇ $\underline{z_3} = a + b$, ◇ $\underline{z_4} = \frac{ja}{1+b}$,

* $|\underline{z_1}| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad \varphi = \arg(\underline{z_1})$ $\quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$ $\quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
* $|\underline{z_2}| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad \tan\varphi = \frac{-b}{a}$ et $Re(\underline{z_2}) < 0$ $\quad \varphi = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) + \pi$
* $|\underline{z_3}| = |a+b|$ $\quad \varphi = 0$ car $a + b > 0$
* $|\underline{z_4}| = \frac{a}{1+b}$ $\quad \varphi = \frac{\pi}{2}$ (imaginaire pur)



Rq : Vérifier les résultats en représentant les différentes grandeurs dans le plan complexe.

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} u = \frac{E}{\tau}$ où $\tau > 0$. CI : $u(0) = \frac{3E}{2}$.

$u_H = A e^{-t/\tau}$ $\quad u_p = E$

$u(t) = E + A e^{-t/\tau}$

CI : $u(0) = \frac{3E}{2}$ et $u(0) = A + E$ d'où $A = \frac{E}{2}$

$$\boxed{u(t) = E\left(1 + \frac{1}{2} e^{-t/\tau}\right)}$$