Semaine 14

Partie n°1: Applications numériques

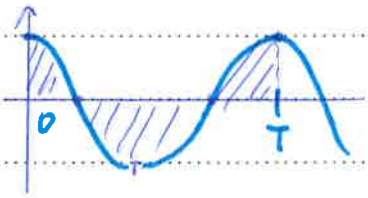
Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $t_1 = -\tau \ln\left(\dfrac{U_1}{E}\right)$ où $U_1 = 2$ V, $E = 16$ V et $\tau = 2$ ms.
- $v = \sqrt{2gh}$ où g est l'accélération de la pesanteur, et $h = 20$ m.
- $\Delta t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ où g est l'accélération de la pesanteur, et $h = 2,5$ m.

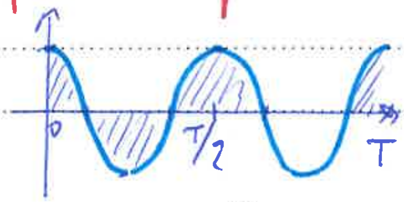
$t_1 = -2 \ln\left(\dfrac{2}{16}\right) = 2 \ln 8 = 2 \ln(2^3) = 3 \times 2 \ln 2$ $\quad \underline{t_1 = 4,2 \text{ ms}}$

$v = \sqrt{2 \times 9,8 \times 20} = \sqrt{400}$ $\quad \underline{v = 20 \text{ m/s}}$

$\Delta t = \sqrt{\dfrac{2 \times 2,5}{10}} = \sqrt{\dfrac{5}{10}} = \sqrt{\dfrac{50}{100}} \simeq \dfrac{7}{10}$ $\quad \underline{\Delta t = 0,7 \text{ s}}$



fonction sinusoïdale de période T/2 qu'on intègre sur T ⇒ intégrale nulle



Partie n°2: Intégration de fonctions trigo

- $I_1 = \displaystyle\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t$
- $I_2 = \displaystyle\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t$

$I_1 = \left[\dfrac{T}{2\pi} \sin\left(\dfrac{2\pi}{T} t\right)\right]_0^T = \dfrac{T}{2\pi} \sin(2\pi) - 0 = 0$

$\boxed{I_1 = 0}$ (intégration d'une sinusoïde sur une période).

$I_2 = \displaystyle\int_0^T \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)\right) = \left[\frac{1}{2} t\right]_0^T = \frac{T}{2}$ $\quad \boxed{I_2 = \dfrac{T}{2}}$

Faire des schémas ! (plan complexe).

Partie n°3: Nombres complexes

1. Identifier la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants (U_m et φ sont 2 réels) :

◇ $\underline{z_1} = e^{-j\pi/2}$, ◇ $\underline{z_2} = e^{-j\pi}$, ◇ $\underline{z_3} = (1+3j)+(2-j)$, ◇ $\underline{z_4} = (1+3j)(2-j)$.

* $\underline{z_1} = \cancel{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \underbrace{j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} = -j$ $\quad Re(\underline{z_1}) = 0 \quad Im(\underline{z_1}) = -1$

* $\underline{z_2} = e^{-j\pi} = -1 \quad Re(\underline{z_2}) = -1 \quad Im(\underline{z_2}) = 0$

* $\underline{z_3} = 1 + 3j + 2 - j = 3 + 2j \quad Re(\underline{z_3}) = 3 \quad Im(\underline{z_3}) = 2$

* $\underline{z_4} = 2 + 3 - j + 6j = 5 + 5j \quad Re(\underline{z_4}) = 5 \quad Im(\underline{z_4}) = 5$

2. Exprimer le module et l'argument des nombres complexes suivants (a et b sont deux réels positifs) :

◇ $\underline{z_1} = \dfrac{ja}{1+b}$, ◇ $\underline{z_2} = -\dfrac{a}{jb}$, ◇ $\underline{z_3} = \dfrac{1+ja}{1-ja}$, ◇ $\underline{z_4} = (1+ja)(1+2ja)$

* $\arg(\underline{z_1}) = \frac{\pi}{2} \quad |\underline{z_1}| = \frac{a}{1+b}$ car a et $b > 0$.

* $\underline{z_2} = -\frac{a}{jb} \times \frac{j}{j} = j\frac{a}{b} \quad \arg(\underline{z_2}) = \frac{\pi}{2} \quad |\underline{z_2}| = \frac{a}{b}$

* $|\underline{z_3}| = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1 \quad \arg(\underline{z_3}) = \arg(1+ja) - \arg(1-ja)$

$\arg(\underline{z_3}) = 2\arctan(a)$

* $|\underline{z_4}| = \sqrt{1+a^2}\sqrt{1+4a^2}$

$\arg(\underline{z_4}) = \arg(1+ja) + \arg(1+2ja)$

$\arg(\underline{z_4}) = \arctan(a) + \arctan(2a)$

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ où $Q > \frac{1}{2}$ et $\omega_0 > 0$. CI : $u(0) = E$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

Polynôme caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

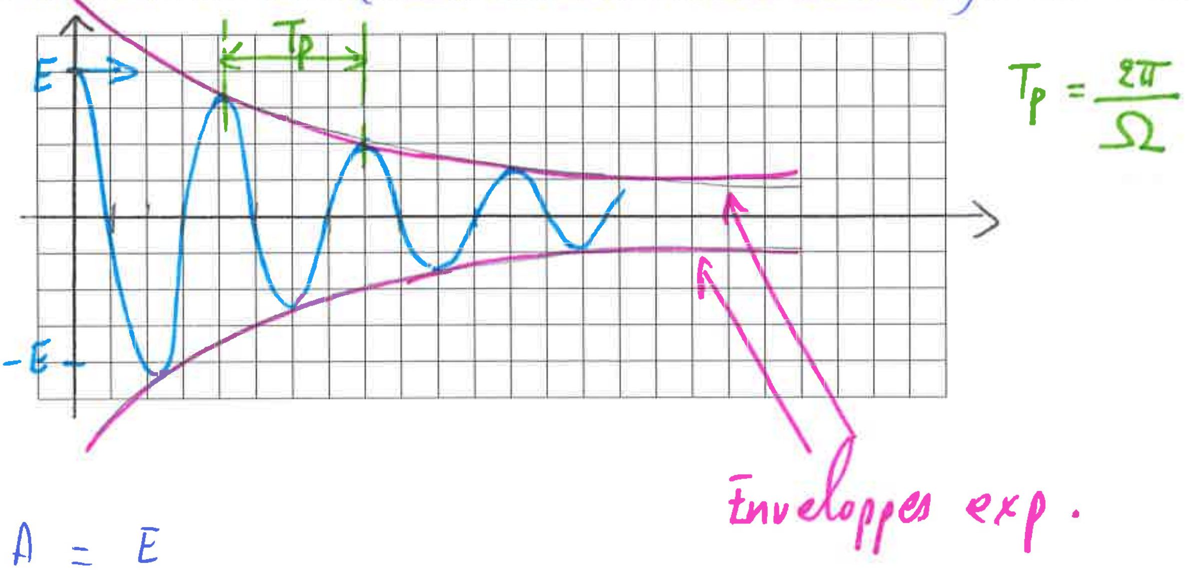
$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0$ car $Q > \frac{1}{2}$

$r_{1,2} = \frac{-\omega_0/Q \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$ on pose $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$

$\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$ $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

$u(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$

$\dot{u}(t) = -\lambda u(t) + e^{-\lambda t}\left(-\Omega A \sin \Omega t + \Omega B \cos(\Omega t)\right)$



$u(0) = A = E$

$\dot{u}(0) = -\lambda E + \Omega B$ $B = \frac{\lambda E}{\Omega}$

$$\boxed{u(t) = e^{-\lambda t}\left(E\cos(\Omega t) + \frac{\lambda E}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)}$$