Semaine 15

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2$ où $U = 2,0.10^2$ V et $C = 220$ nF.
- $\tau = \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}$ où g est l'accélération de la pesanteur, $m = 0,6$ kg et $\alpha = 1,3.10^{-2}$ kg/m.
- $m = \rho \times L \times \ell \times h$ où $L = 10$ m, $\ell = 5,0$ m, $h = 1,5$ m et ρ la masse volumique de l'eau.

$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \times 220.10^{-9} \times 4.10^{4} = 4,4.10^{-3}$ J $\qquad \underline{\mathcal{E} = 4,4 \text{ mJ}}$

$\tau = \sqrt{\frac{0,6}{1,3.10^{-2} \times 10}} = \sqrt{\frac{6 \times \cancel{10^{-1}}}{1,3 \times \cancel{10^{-1}}}} \simeq \sqrt{4,5}$ $\qquad \underline{\tau \simeq 2,1 \text{ s}}$

$m = 10^3 \times 10 \times 5 \times 1,5$ $\qquad \underline{m = 7,5.10^3 \text{ kg}}$

Partie n°2: Intégration de fonctions trigo

- $I_1 = \int_0^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ on linéarise
- $I_2 = \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$

$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \underbrace{\sin(2\theta)}_{\pi\text{-périodique}}\,d\theta = \left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$ $\qquad \underline{I_1 = 0}$

$\Rightarrow$ on intègre sur 2 périodes $\Rightarrow I_1 = 0$

$I_2 = \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \left[\frac{-T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{T/2} = -\frac{T}{2\pi}\left(\cos(\pi) - 1\right)$

$\boxed{I_2 = \frac{T}{\pi}}$

Partie n°3: Nombres complexes

Exprimer le module et l'argument des expressions ci-dessous. Indiquer le module et l'argument quand $x \to 0$ et $x \to \infty$.

$\diamond\ \underline{H_1} = \dfrac{1}{1+jx}$, $\diamond\ \underline{H_2} = \dfrac{jx}{1+jx}$, $\diamond\ \underline{H_3} = \dfrac{jx}{1-jx+x^2}$, $\diamond\ \underline{H_4} = \dfrac{1}{1+j\left(x-\frac{1}{x}\right)}$.

$H_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\arg(\underline{H_1}) = -\arg(1+jx)$ $\arg H_1 = \arctan(x)$

$\underline{H_1}(0) = 1$ $H_1(0) = 1$ et $\arg H_1(0) = 0$

$H_2 = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\boxed{\arg \underline{H_2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)}$

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ où $Q > \frac{1}{2}$ et $\omega_0 > 0$. CI : $u(0) = E$ et $\dfrac{du}{dt}(0) = 0$.

$r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$ $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$ car $Q > \frac{1}{2}$

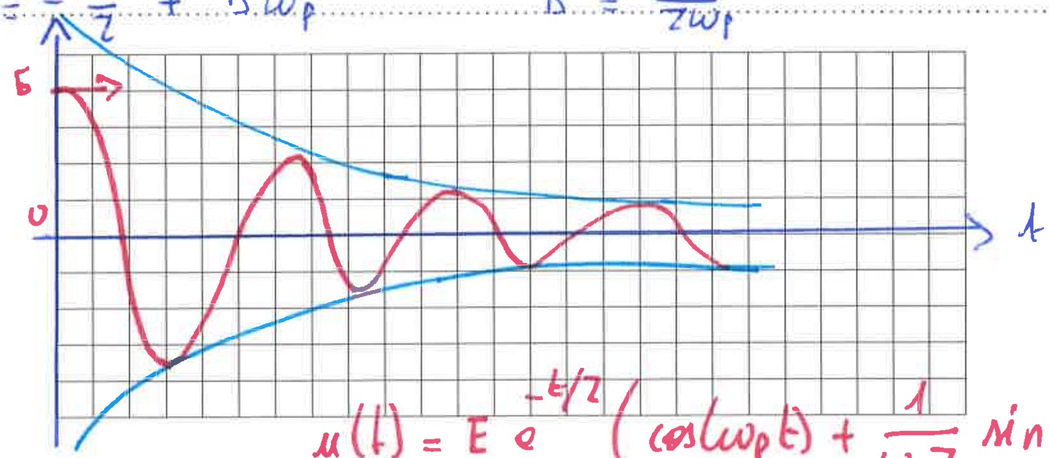
On pose $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$ $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

$u(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right)$

$u(0) = E$ d'où $A = E$

$\dot{u}(t) = -\frac{1}{\tau}u(t) + e^{-t/\tau}\left(-\omega_p A\sin(\omega_p t) + B\omega_p\cos(\omega_p t)\right)$

$0 = -\frac{E}{\tau} + B\omega_p$ $B = \dfrac{E}{\tau\omega_p}$



$u(t) = E\,e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_p t) + \dfrac{1}{\omega_p \tau}\sin(\omega_p t)\right)$

$\underline{H}_2(0) = 0$ $\quad H_2(0) = 0 \quad \arg \underline{H}_2(0) = 0$

$\underline{H}_2 \underset{+\infty}{\sim} 1 \quad H_2 \underset{x \to \infty}{=} 1. \quad \arg(\underline{H}_2) = 0$

* $H_3 = \dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^2 + x^2}}$ $\quad \arg \underline{H}_3 = \dfrac{\pi}{2} - \arg(1 - jx + x^2)$

$\arg \underline{H}_3 = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{-x}{1+x^2}\right)$

signe de la partie réelle toujours $\oplus$

$H_3(0) = 0$

$H_3 \underset{x \to +\infty}{=} 0 \quad \arg \underline{H}_3 \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$

* $\boxed{H_4 = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$ $\quad \boxed{\arg \underline{H}_4 = -\arctan\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$

$H_4(0) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \arg \underline{H}_4(0) = \dfrac{\pi}{2}$

$H_4 \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \arg \underline{H}_4 \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} -\dfrac{\pi}{2}$