Semaine 17

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ où $k = 6,0.10^4$ N/m, $M = 7,8$ kg et $m = 3,2$ kg.
- $g = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}$ où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle, M_T la masse de la Terre, et R_T le rayon de la Terre.

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6.10^4}{11}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{600\times10^2}{11}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{55\times100} \simeq \frac{7,5}{2\times3,14}\times10$

$f \simeq 11$ Hz

$g = \frac{6,7.10^{-11}\times6.10^{24}}{(6,4.10^6)^2} \simeq \frac{6,7\times6}{6,4}\times10$ $\quad g \simeq 10\ m/s^2$

Partie n°2: Nombres complexes

Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire, puis le module et l'argument des expressions ci-dessous.

- $\underline{z_1} = \dfrac{1+j}{j}$,
- $\underline{z_2} = \dfrac{1}{1-j}$,
- $\underline{z_3} = \dfrac{-2+j}{2+j}$,
- $\underline{z_4} = \dfrac{\sqrt{3}+j}{2j}$.

$\underline{z_1} = \frac{-j(1+j)}{-j\times j} = 1-j$ $\quad Re(\underline{z_1}) = 1$ $\quad Im(\underline{z_1}) = -1$

$|\underline{z_1}| = \frac{\sqrt{1+1}}{1}$ $\quad |\underline{z_1}| = \sqrt{2}$ $\quad arg(\underline{z_1}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

$\underline{z_2} = \frac{1+j}{2}$ $\quad Re(\underline{z_2}) = \frac{1}{2}$ $\quad Im(\underline{z_2}) = \frac{1}{2}$

$|\underline{z_2}| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad arg(\underline{z_2}) = -arg(1-j) = \frac{\pi}{4}$

$\underline{z_3} = \frac{(-2+j)(2-j)}{5} = \frac{-3+4j}{5}$ $\quad Re(\underline{z_3}) = -\frac{3}{5}$ $\quad Im(\underline{z_3}) = \frac{4}{5}$

$|\underline{z_3}| = 1$ $\quad arg(\underline{z_3}) = arg(-2+j) - arg(2+j)$

$= \pi + \arctan(-1/2) - \arctan(1/2)$

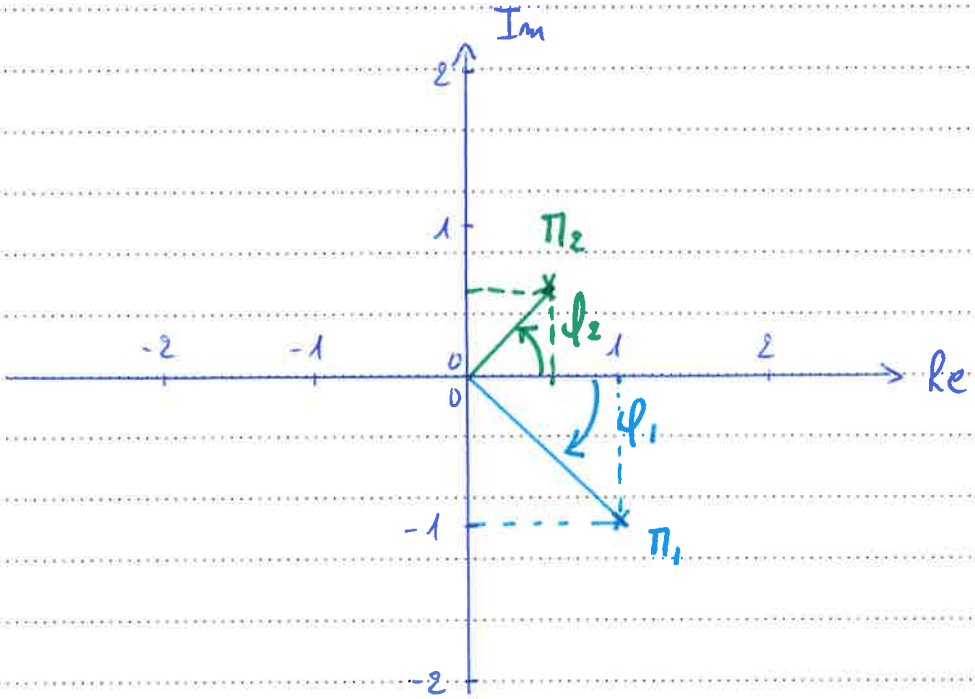
$= \pi - 2\arctan(1/2)$

$\arg(\underline{z}_3) = 2{,}2$ rad $\qquad \arg(\underline{z}_3) = 127°$

* $\underline{z}_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} j + \frac{1}{2}$ $\qquad Re(\underline{z}_4) = \frac{1}{2}$ $\qquad Im(\underline{z}_4) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|\underline{z}_4| = \frac{\sqrt{4}}{2} \qquad |\underline{z}_4| = 1$

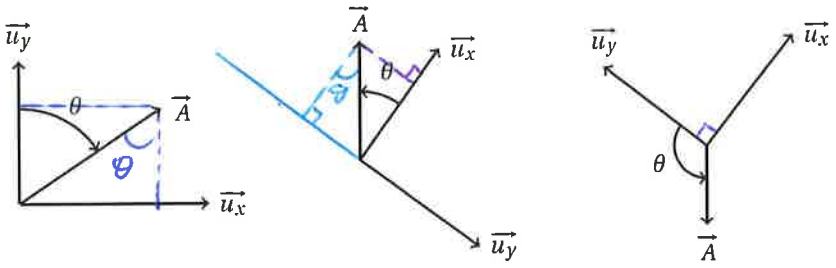
$\arg(\underline{z}_4) = -\frac{\pi}{6}$



Remarque : il ne faut pas hésiter à faire des schémas dans le plan complexe.

Partie n°3: Produit scalaire

Dans chacun des cas ci-contre, exprimer les coordonnées du vecteur $\vec{A}$ dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$.



On note $A = \|\vec{A}\|$ ① $\vec{A} = A\sin\theta\,\vec{u}_x + A\cos\theta\,\vec{u}_y$

② $\vec{A} = A\cos\theta\,\vec{u}_x - A\sin\theta\,\vec{u}_y$

③ $\vec{A} = -A\sin\theta\,\vec{u}_x + A\cos\theta\,\vec{u}_y$ et $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ où $Q = \frac{1}{2}$ et $\omega_0 > 0$. CI : $u(0) = E$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

polynôme caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$ $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$

$\Delta = 0$

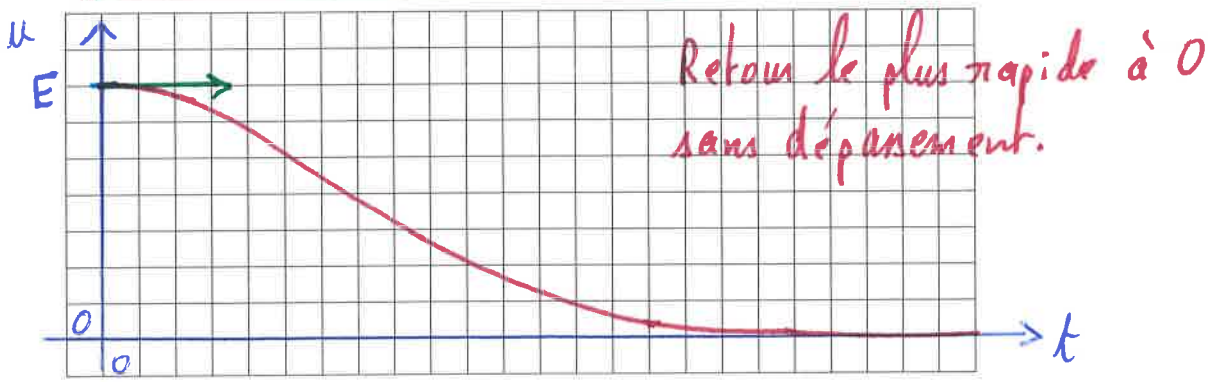
d'où $u(t) = (At + B)\,e^{-\omega_0 t}$

$\frac{du}{dt} = -\omega_0 (At + B)\,e^{-\omega_0 t} + A\,e^{-\omega_0 t}$

CI : $u(0) = E$ d'où $B = E$

$\frac{du}{dt}(0) = 0 = -\omega_0 B + A$ $A = \omega_0 t$

$$\boxed{u(t) = E(\omega_0 t + 1)\,e^{-\omega_0 t}}$$



Retour le plus rapide à 0 sans dépassement.