Semaine 18

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $\diamond$ $v = \dfrac{F\Delta t}{m}$ où $F = 250$ N, $\Delta t = 20$ ms et $m = 453$ g.
- $\diamond$ $J = \dfrac{1}{12}ML^2$ où $M = 10$ kg et $L = 3,1$ m.
- $\diamond$ $v = \sqrt{2gd\sin(\alpha)}$ où g est l'accélération de la pesanteur, $d = 2$ m et $\alpha = 15°$.

$v = \dfrac{250 \times 20.\cancel{10^{-3}}}{453.\cancel{10^{-3}}} = \dfrac{500}{453}$ $\quad$ $v = 1,1\ m/s$

$J = \dfrac{1}{12} \times 10 \times \underbrace{3,1^2}_{9,6} = \dfrac{96}{12}$ $\quad$ $J = 8,0\ kg\,m^2$

$v = \left(2 \times 10 \times 2 \times \underbrace{\sin\left(\frac{15}{180} \times \pi\right)}_{\sin\alpha = \alpha}\right)^{1/2} = \sqrt{40 \times \frac{\pi}{12}}$ $\quad$ $v = 3\ m/s$

Partie n°2: Produit scalaire

On considère une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer dans chaque cas le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$, puis l'angle entre les 2 vecteurs.

1. $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

4. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

6. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. $\vec{u}.\vec{v} = 0$ $\quad$ $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \pm\frac{\pi}{2}$

3. $\vec{u}.\vec{v} = 24$ $\quad$ $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \dfrac{24}{25}$ $\quad$ $\alpha = \pm 15°$

5. $\vec{u}.\vec{v} = 4$ $\quad$ $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ $\quad$ $\alpha = 0,6\ rad$ $\quad$ $\alpha = 37°$

2. $\vec{u}.\vec{v} = 0$ $\quad$ $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$

④ $\vec{u}.\vec{v} = 6$ $\cos\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{8}\times\sqrt{5}} = \dfrac{6}{2\sqrt{10}} = 0,9$ $\alpha = 20°$

⑤ $\vec{u}.\vec{v} = 7$ $\cos\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{2}\sqrt{23}} \simeq 0,98$ $\alpha \simeq 8°$

Partie n°3: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$ où $Q > \frac{1}{2}$ et $\omega_0 > 0$. CI : $u(0) = 0$ et $\dfrac{du}{dt}(0) = 0$.

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$$

$$r_{1,2} = \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\lambda} \pm j\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}_{\omega_p}$$

solution particulière

$$u(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right) + E$$

$u(0) = 0 \Rightarrow \boxed{A = -E}$

$$\frac{du}{dt} = -\lambda e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right) + \omega_p e^{-\lambda t}\left(-A\sin(\omega_p t) + B\cos(\omega_p t)\right)$$

$\dfrac{du}{dt}(0) = 0 = +\lambda E + \omega_p B$ $\boxed{B = \dfrac{-\lambda E}{\omega_p}}$