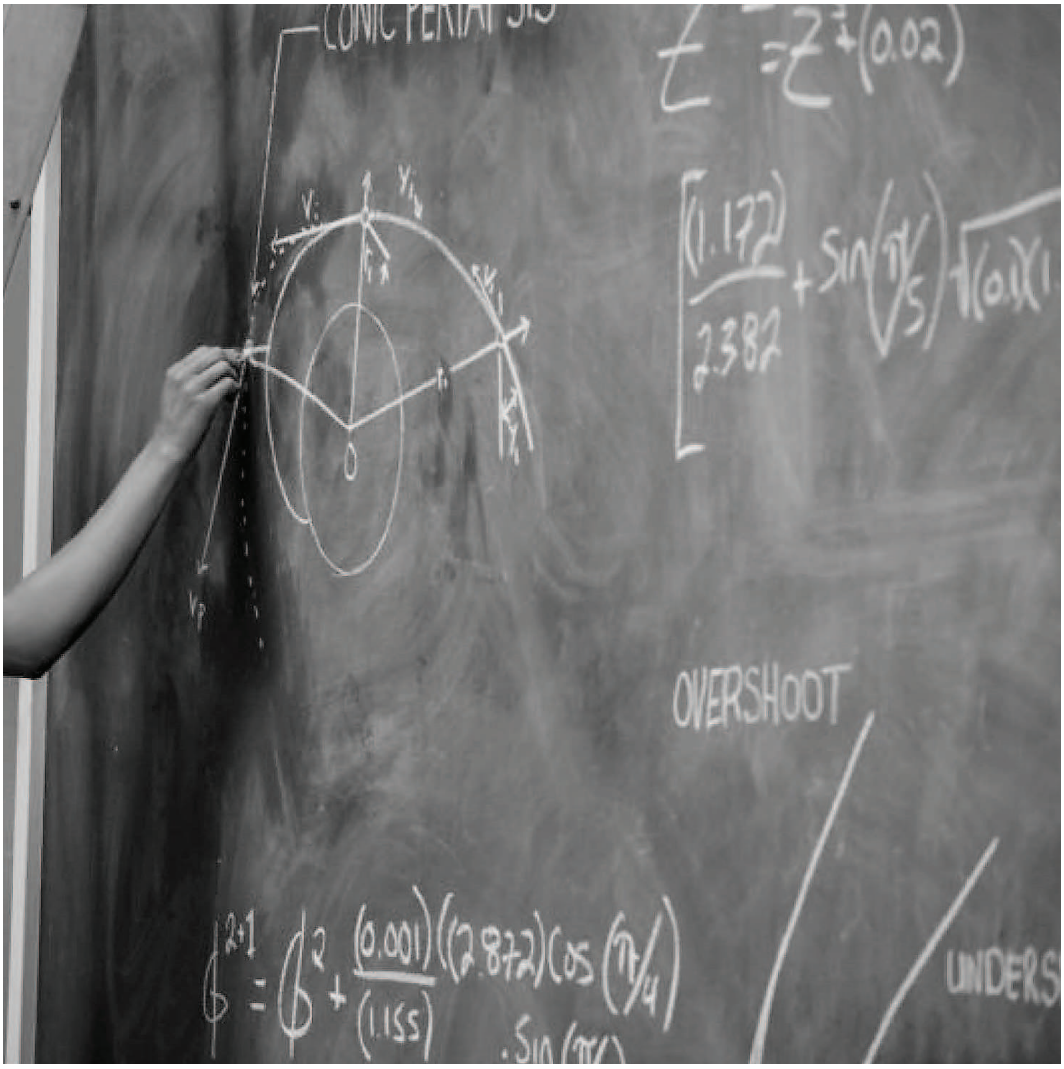
Cahier de calculs



Semaine 1	14 septembre 2019
Semaine 2	21 septembre 2019
Semaine 3	28 septembre 2019
Semaine 4	5 octobre 2019
Semaine 5	12 octobre 2019
Semaine 6	2 novembre 2019
Semaine 7	9 novembre 2019
Semaine 8	16 novembre 2019
Semaine 9	23 novembre 2019
Semaine 10	30 novembre 2019
Semaine 11	9 décembre 2019
Semaine 12	7 décembre 2019
Semaine 13	14 décembre 2019
Semaine 14	4 janvier 2020
Semaine 15	11 janvier 2020
Semaine 16	18 janvier 2020
Semaine 17	25 janvier 2020
Semaine 18	1 février 2020
Semaine 19	8 février 2020
Semaine 20	8 mars 2020
Semaine 21	15 mars 2020
Semaine 22	22 mars 2020
Semaine 23	29 mars 2020
Semaine 24	5 avril 2020

Quelques conseils pour calculer sans calculatrice

En PT, la calculatrice est interdite à l'écrit. Il faut pourtant être capable de faire des applications numériques dont le résultat doit être plus précis que de simples ordres de grandeur.

→ **Ne pas hésiter à faire des étapes intermédiaires, à poser des calculs.**

→ **Connaître quelques résultats utiles pour la physique détaillés dans ce fascicule ($\ln(2)$, $\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$...).**

Quelques petits rappels du collège et du lycée

- connaître les carrés des nombres jusqu'à 15,
- connaître les puissances de 2 avec en particulier $2^{10} = 1024$,
- diviser par un nombre = multiplier par son inverse par exemple diviser par $0,25$ revient à multiplier par 4.

Additions et soustractions

- ne pas hésiter à décomposer pour simplifier. Par exemple $98+32 = 100-2+32$ ou encore $98+32 = 90+30+8+2$.
- simplifier au maximum les nombres $1234 - 1031 = 204 - 1$.

Multiplications

- multiplier par 25 revient à multiplier par 100 et diviser par 4.

Divisions

- un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (il est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9). Si un nombre divisible par 3 est pair, il sera logiquement divisible par 6.
- un nombre est divisible par 4 si le nombre constitué de ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.

Semaine 1

Partie n°1: Ordres de grandeur

Pour pouvoir faires des applications numériques sans calculatrice, il est important d'avoir quelques repères et de connaître certaines valeurs numériques. Remplir le tableau suivant. Vous pouvez vérifier vos résultats à l'aide d'une calculatrice ou de `Python`.

Suivant les cas, 1, 2 ou 3 chiffres significatifs sont nécessaires ou suffisants.

$\sqrt{2}$ = ...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ = ...	$\ln(2)$ = ...
$\sqrt{3}$ = ...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ = ...	$\ln(10)$ = ...
2^3 = ...	2^{10} = ...	$\log(10)$ = ...

Rq

$\ln$ représente le logarithme népérien fonction réciproque de l'exponentielle : $\ln(\exp x) = x$.
$\log$ représente le logarithme en base 10 : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Partie n°2: Faire les applications numériques suivantes sans calculatrice

$A = 230 \times \sqrt{2}$, $B = 2\pi \times 440$, $C = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{72}}$, $D = \frac{1}{40}$, $E = 12 \times 60/40$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Vous pourrez vérifier vos résultats avec une calculatrice ou avec `Python`.

Rq

Attention à être cohérent avec les chiffres significatifs : inutile de donner un résultat avec 4 chiffres significatifs si vous avez approximé une grandeur avec un chiffre significatif.

Partie n°3: Fonctions trigonométriques

Méthode

- **Méthode 1 : méthode graphique** (à privilégier car elle évite tout calcul). Tracer un cercle trigo. Repérer un angle quelconque θ, compris entre 0 et $\pi/4$ et "loin" de $\pi/4$ pour éviter toute ambiguïté. Ensuite tracer les angles demandés : $\frac{\pi}{2} \pm \theta$, $\pi \pm \theta$ puis repérer les grandeurs demandées.
- **Méthode 2 :** Appliquer les formules d'addition puis les simplifier grâce aux valeurs particulières des fonction trigo en π et $\pi/2$.
- **Vérification du résultat** pour des valeurs particulières de θ, par exemple $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$...

Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos(\theta)$ et/ou $\sin(\theta)$.

◇ $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) =$

◇ $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) =$

◇ $\cos(\pi + \theta) =$

◇ $\sin(\pi - \theta) =$

Partie n°4: Expression trigonométrique

Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

....

....

....

....

....

....

Rq On peut vérifier la cohérence du résultat avec des valeurs particulières de θ. Par exemple, $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \pi/3$...

Partie n°5: Intégration de fonctions trigo

◇ $I_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$

◇ $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$

◇ $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$

◇ $I_4 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$

....

Rq

- Les fonction $\sin$ et $\cos$ sont 2π-périodiques. Leur intégrale sur une période est toujours nulle.
- En physique, inutile de faire tous les calculs si les résultats son évidents.
- Il est souvent utile de faire une représentation graphique rapide de la fonction pour avoir une idée du résultat ou savoir comment mener le calcul.
- En physique, il est indispensable de linéariser les fonctions trigo avant de les intégrer.

Partie n°6: Formules de trigo

Linéariser les expressions suivantes :

- $A = \cos(\alpha)\cos(\beta)$
- $B = S_0 \sin(\omega t) \sin(kx)$

Semaine 2

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes et donner la valeur des différentes grandeurs accompagnée de l'unité adéquate. Il peut être nécessaire de procéder par analyse dimensionnelle pour retrouver l'unité adaptée.

- $\lambda = \dfrac{c}{f}$ où c est la célérité de la lumière dans le vide et $f = 5.10^{14}$ Hz.
- $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ où $r = 100$ pm. On donnera le résultat en m^3.
- $m = \dfrac{kT_0^2}{4\pi^2}$ où k est une constante de raideur, $k = 7.10$ N/m et $T_0 = 2$ s.

Partie n°2: Fonction trigonométriques

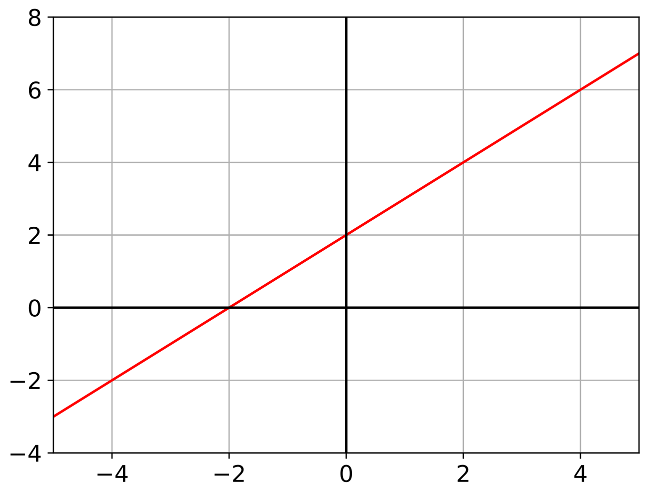
Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \sin(\theta + \pi) + \cos(\pi/2 + \theta) + \sin(\theta) - \sin(-\theta)$.
- $B = \cos(\theta) + \cos(\theta - \pi/2) - \sin(\theta - \pi) + \cos(\pi - \theta)$

Partie n°3: Linéarisation des fonctions trigo

- $A = 3\sin^2(2\theta)$
- $B = 2\cos^4(\theta)$

Partie n°4: Exploitation de caractéristique



1. Donner l'équation de la droite représentée ci-contre.

2. Tracer la droite d'équation $y = -x$.

3. Chercher l'intersection des 2 droites par le calcul puis vérifier le résultat sur le graphe.

Semaine 3

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes.

- $k = \dfrac{2\pi^2 m}{T_0^2}$ où $m = 50$ g, $T_0 = 0,8$ s.
- $A = \dfrac{23}{299}$.
- $B = \dfrac{335}{273}$.

Partie n°2: Fonction trigonométriques

Donner les expressions suivantes en fonction de $\sin(\beta)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\beta)$ et $\cos(\alpha)$

- $A = \sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta - \alpha)$
- $C = \sin(\beta + \alpha) \times \sin(\beta - \alpha)$
- $B = \cos(\beta - \alpha) + \cos(\beta + \alpha)$
- $D = \cos(\beta + \alpha) \times \cos(\beta - \alpha)$

Partie n°3: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.
$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$ CI : $x(0) = d$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Semaine 4

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $f' = \dfrac{d \times d'}{-d + d'}$ où $d = 10$ cm et $d' = 4,0$ cm
- $d = D\tan(\alpha)$ où $D = 20$ m et $\alpha = 1,0.10^{-4}$ rad

Partie n°2: Conversion

Convertir l'angle $\alpha = 2\,''$ en radian. Calculer $d = D\sin\alpha$ où $D = 150.10^6$ km.

Rappel

α est donné en seconde d'angle. Il faut $60\,''$ pour faire une minute d'angle. Et il faut $60\,'$ (60 minutes) pour faire un degré.

Partie n°3: Fonction trigonométriques

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \cos(\theta - \pi) - \sin(\pi - \theta) + \cos(\theta + \pi) - \sin(-\theta)$
- $B = \sin(\theta) + \cos(\theta + \pi/2) + \cos(\theta) - \sin(\theta + \pi/2)$

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2 \ddot{x} + x = X_0$ CI : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

Semaine 5

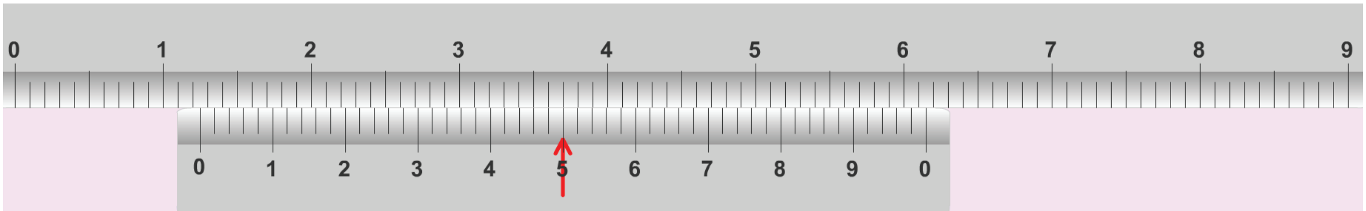
Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $\tau = \dfrac{\ln(2)}{k}$ où $k = 4,96.10^{-2}\ \mathrm{min}^{-1}$.
- $\lambda = \dfrac{h \times \mathcal{N}_a}{m \times v}$ où h est la constante de Planck, $\mathcal{N}_a$ le nombre d'Avogadro, $m = 23\ \mathrm{g}$ et $v = 300\ \mathrm{m/s}$.
- $\ell = \sqrt{\dfrac{3h\lambda}{8m_e c}}$ où h est la constante de Planck, c la célérité de la lumière dans le vide, m_e la masse d'un électron et $\lambda = 450\ \mathrm{nm}$.

Partie n°2: Lecture au vernier

Indiquer la grandeur mesurée en mm. Les graduations principales indiquent des cm.



Rappel

Principe de la lecture au vernier

- Lire sur la règle le nombre entier de mm juste avant le zéro du vernier.
- Repérer la graduation du vernier qui est la mieux alignée avec une graduation quelconque de la règle. La graduation du vernier indique dixièmes (ou centièmes) de mm .

Partie n°3: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.
$\ddot{u} + \omega_0^2\, u = \omega_0^2\, E$ CI : $u(0) = \frac{3}{2}E$ et $\dot{u}(0) = 0$.

Semaine 6

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

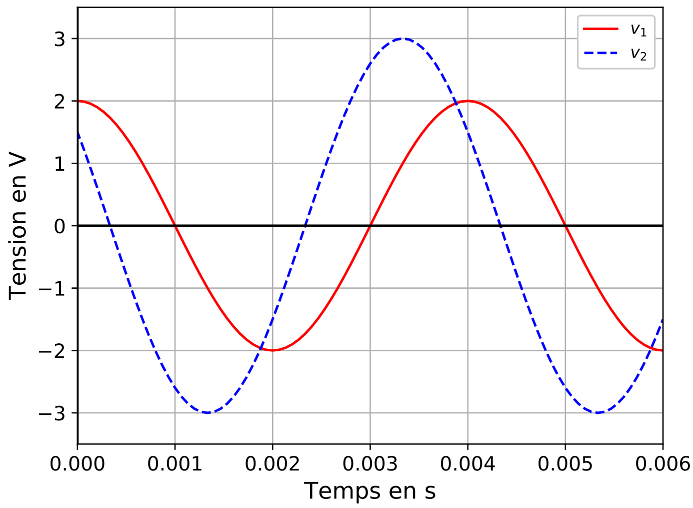
- $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}}$ où e est la charge élémentaire, $U = 150\ \mathrm{V}$ et m_e la masse d'un électron.
- $W = 0,67 \times 3,6.10^3$ où W est une énergie en J.

Partie n°2: Fonctions trigonométriques

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \cos(3\theta)\cos(\theta) - \sin(3\theta)\sin(\theta)$
- $B = \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin(2\theta)} - \dfrac{\cos(3\theta)}{\cos(2\theta)}$ pour $\theta \in]0,\ \pi/4[$.

Partie n°3: Signaux sinusoïdaux



On considère les 2 tensions sinusoïdales représentées ci-contre.

1. Pour chaque signal relever l'amplitude, la période, la fréquence.

2. La tension v_2 est-elle en avance ou en retard par rapport à la tension v_1 ? Calculer le déphasage $\varphi_{2/1}$.

3. Pour chaque signal calculer la phase à l'origine. Vérifier la cohérence des résultats avec la question précédente.

4. Indiquer la forme analytique de chaque signal.

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.
$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$ CI : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

Semaine 7

Partie n°1: Ordres de grandeur

e^{-1} = ... e^{-3} = ... e^{-5} = ...

$1-e^{-1}$ = ... $1-e^{-3}$ = ... $1-e^{-5}$ = ...

Partie n°2: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- ◇ $R_{\text{eq}1}=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ où $R_1=10\ \mathrm{k\Omega}$ et $R_2=1,0\ \mathrm{k\Omega}$.
- ◇ $R_{\text{eq}2}=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ où $R_1=4,7\ \mathrm{k\Omega}$ et $R_2=1,0\ \mathrm{k\Omega}$.
- ◇ $U_1=\dfrac{R_1}{R_1+R_2}E$ où $R_1=6,8\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2=2,2\ \mathrm{k\Omega}$ et $E=10\ \mathrm{V}$.
- ◇ $I_1=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}I_0$ où $R_1=8,2\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2=2,2\ \mathrm{k\Omega}$ et $I_0=10\ \mathrm{mA}$.

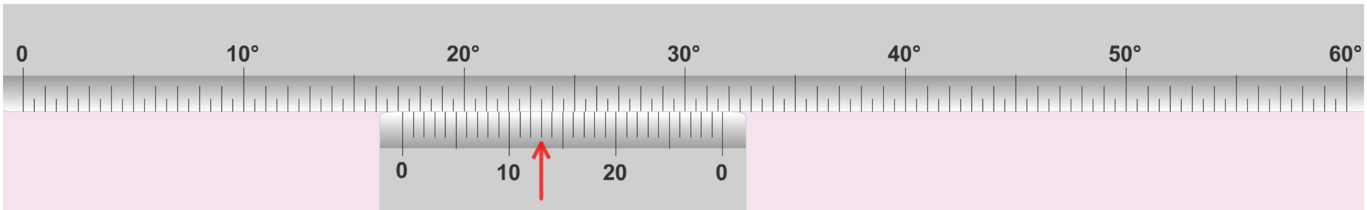
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Partie n°3: Linéarisation des fonctions trigo

1. $C = \sin^2(\theta + \pi/3)$
2. $D = \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$

Partie n°4: Lecture au vernier

Indiquer l'angle α mesuré en °. Puis convertir cet angle en radian (avec une calculatrice). On sera particulièrement vigilant aux chiffres significatifs.



Rappel

Principe de la lecture au vernier

- Lire sur la règle le nombre entier de ° juste avant le zéro du vernier.
- Repérer la graduation du vernier qui est la mieux alignée avec une graduation quelconque de la règle. La graduation du vernier indique les minutes d'angle.

Semaine 8

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- ◇ $\tau_1 = RC$ où $R = 15\ \mathrm{k\Omega}$ et $C = 22\ \mathrm{nF}$.
- ◇ $\tau_2 = \dfrac{L}{R}$ où $L = 50\ \mathrm{mH}$ et $R = 5,6\ \mathrm{k\Omega}$.

Partie n°2: Fonctions trigonométriques

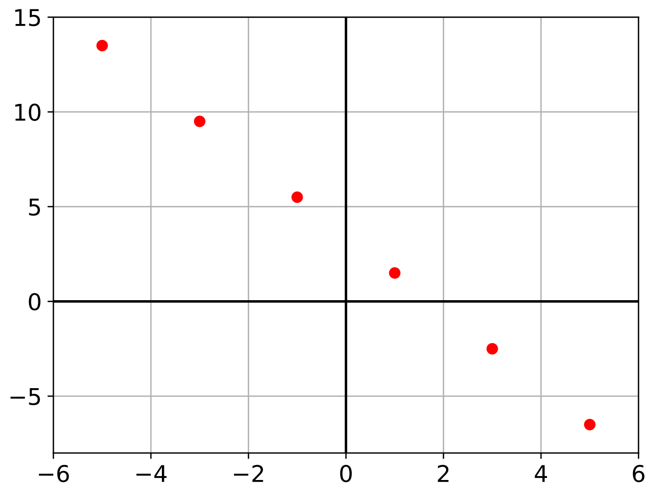
Simplifier l'expression suivante : $A = \sin(4\theta)\cos(2\theta) + \sin(2\theta)\cos(4\theta)$.

Partie n°3: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} + k\,c = 0$ où $k > 0$. CI : $c(0) = C_0$.

Partie n°4: Tracé de droites



1. Tracer la droite représentée par les points ci-contre et en donner l'équation.

2. Tracer la droite d'équation $y = 2x + 1$.

3. Chercher l'intersection des 2 droites par le calcul puis vérifier le résultat sur le graphe.

Semaine 9

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $C = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$ où ε_0 est la permittivité du vide, $A = 10\ \mathrm{cm}^2$ et $d = 0,2\ \mu\mathrm{m}$.
- $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ où $L = 50\ \mathrm{mH}$ et $C = 220\ \mathrm{pF}$.
- $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ où $L = 10\ \mathrm{mH}$ et $C = 47\ \mathrm{nF}$.

Partie n°2: Intégration de fonctions trigo

- $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$
- $I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin(\theta) + 1)\,\mathrm{d}\theta$

Partie n°3: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\tau \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E$ où $\tau > 0$. CI : $u(0) = 0$.

Semaine 10

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\ell}{S}$ où $\gamma = 5,9.10^7$ S/m est la conductivité électrique du cuivre, $\ell = 10$ m et $S = 3,1$ mm^2.
- $C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{\ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ où ε_0 est la permittivité électrique du vide, $\varepsilon_r = 2,5$ est la permittivité électrique relative, $\ell = 1$ cm, $R_1 = 0,5$ mm et $R_2 = 2$ mm.
- $L = \dfrac{1}{C\omega_0^2}$ où $C = 400$ pF et $\omega_0 = 1,0.10^6$ rad/s.

....

....

....

....

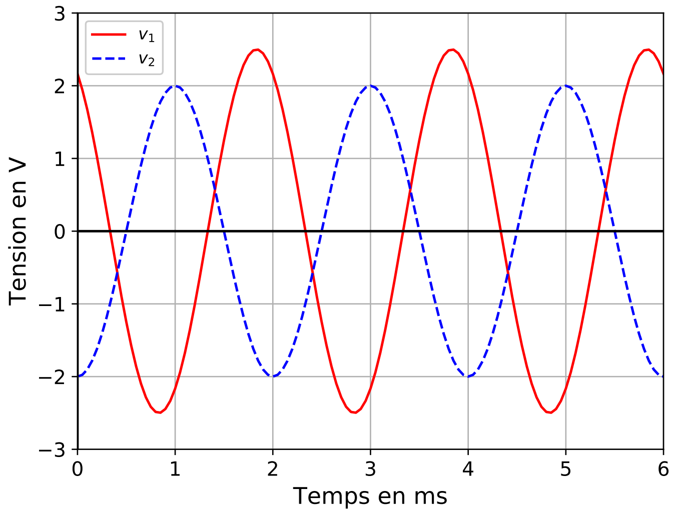
....

....

....

....

Partie n°2: Signaux sinusoïdaux



On considère les 2 tensions sinusoïdales représentées ci-contre.

1. Pour chaque signal relever l'amplitude, la période, la fréquence.

2. La tension v_2 est-elle en avance ou en retard par rapport à la tension v_1 ? Calculer le déphasage $\varphi_{2/1}$.

3. Pour chaque signal calculer la phase à l'origine. Vérifier la cohérence des résultats avec la question précédente.

4. Indiquer la forme analytique de chaque signal.

....

....

Partie n°3: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivant.

$\dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} - k\,c = 0$ où $k > 0$. CI : $c(0) = C_0$.

Semaine 11

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $L = \mu_0 \dfrac{N^2 S}{\ell}$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, $N = 2,0.10^3$ spires, $\ell = 3$ cm et $S = 12$ cm^2
- $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$ où $\omega_0 = 1,0.10^6$ rad/s et $\Delta\omega = 6,8.10^4$ rad/s.

Partie n°2: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.
$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} u = 0$ où $\tau > 0$. CI : $u(0) = E$.

Semaine 12

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $\diamond$ $Q_1 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ où $R = 100\ \Omega$, $C = 22\ \mathrm{nF}$ et $L = 50\ \mathrm{mH}$.
- $\diamond$ $Q_2 = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ où $R = 10\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 47.10\ \mathrm{pF}$ et $L = 50\ \mathrm{mH}$.

Partie n°2: Intégration de fonctions trigo

- $\diamond$ $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$
- $\diamond$ $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} (\sin(2\theta) + \theta)\,\mathrm{d}\theta$

Partie n°3: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} u = \dfrac{E}{\tau}$ où $\tau > 0$. CI : $u(0) = \frac{E}{2}$.

Semaine 13

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $U = E\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$ où $E = 20\ \mathrm{V}$, $\tau = 1\ \mathrm{ms}$ et $t_1 = 3\ \mathrm{ms}$.
- $t_2 = -\tau \ln\left(\dfrac{U_2}{E}\right)$ où $U_2 = 5\ \mathrm{V}$, $E = 10\ \mathrm{V}$ et $\tau = 10\ \mathrm{ms}$.

....

....

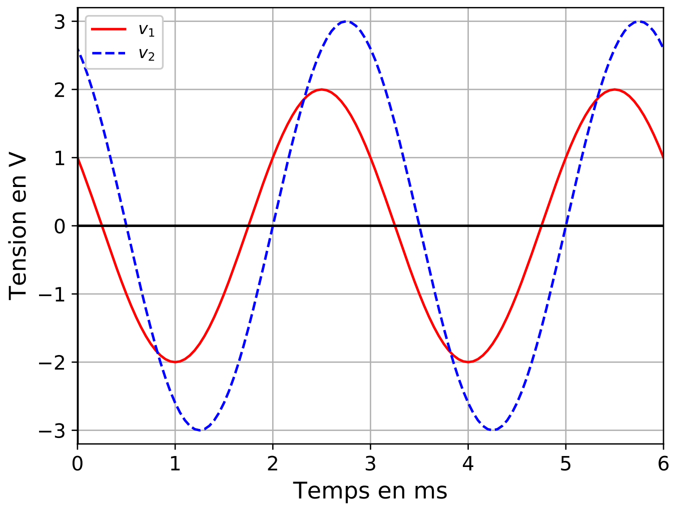
....

....

....

....

Partie n°2: Signaux sinusoïdaux



On considère les 2 tensions sinusoïdales représentées ci-contre.

1. Pour chaque signal relever l'amplitude, la période, la fréquence.

2. La tension v_2 est-elle en avance ou en retard par rapport à la tension v_1 ? Calculer le déphasage $\varphi_{2/1}$.

3. Pour chaque signal calculer la phase à l'origine. Vérifier la cohérence des résultats avec la question précédente.

4. Indiquer la forme analytique de chaque signal.

....

....

....

....

....

....

Partie n°3: Nombres complexes

5. Identifier la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants (U_m et φ sont 2 réels) :

- ◇ $\underline{z_1} = 2 + 3j$, ◇ $\underline{z_2} = \dfrac{1}{j}$, ◇ $\underline{z_3} = U_m\, e^{j\varphi}$, ◇ $\underline{z_4} = -e^{j\pi/2}$,

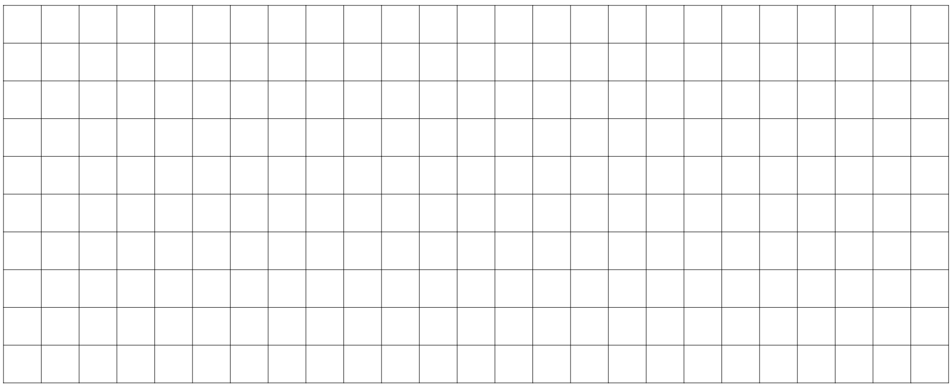
6. Exprimer le module et l'argument des nombres complexes suivants (a et b sont deux réels positifs) :

- ◇ $\underline{z_1} = a + jb$, ◇ $\underline{z_2} = -a + jb$, ◇ $\underline{z_3} = a + b$, ◇ $\underline{z_4} = \dfrac{ja}{1+b}$,

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}$ où $\tau > 0$. CI : $u(0) = \frac{3E}{2}$.



Semaine 14

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $t_1 = -\tau \ln\left(\frac{U_1}{E}\right)$ où $U_1 = 2\ \mathrm{V}$, $E = 16\ \mathrm{V}$ et $\tau = 2\ \mathrm{ms}$.
- $v = \sqrt{2gh}$ où g est l'accélération de la pesanteur, et $h = 20\ \mathrm{m}$.
- $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ où g est l'accélération de la pesanteur, et $h = 2,5\ \mathrm{m}$.

Partie n°2: Intégration de fonctions trigo

- $I_1 = \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}\, t\right) \mathrm{d}t$
- $I_2 = \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}\, t\right) \mathrm{d}t$

Partie n°3: Nombres complexes

1. Identifier la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants (U_m et φ sont 2 réels) :

◇ $\underline{z_1} = e^{-j\pi/2}$, ◇ $\underline{z_2} = e^{-j\pi}$, ◇ $\underline{z_3} = (1+3j)+(2-j)$, ◇ $\underline{z_4} = (1+3j)(2-j)$.

2. Exprimer le module et l'argument des nombres complexes suivants (a et b sont deux réels positifs) :

◇ $\underline{z_1} = \dfrac{ja}{1+b}$, ◇ $\underline{z_2} = -\dfrac{a}{jb}$ ◇ $\underline{z_3} = \dfrac{1+ja}{1-ja}$, ◇ $\underline{z_4} = (1+ja)(1+2ja)$

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,u=0$ où $Q>\frac{1}{2}$ et $\omega_0>0.$ CI : $u(0)=E$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0)=0.$

Semaine 15

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- ◇ $\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}CU^2$ où $U = 2,0.10^2$ V et $C = 220$ nF.
- ◇ $\tau = \sqrt{\dfrac{m}{\alpha g}}$ où g est l'accélération de la pesanteur, $m = 0,6$ kg et $\alpha = 1,3.10^{-2}$ kg/m.
- ◇ $m = \rho \times L \times \ell \times h$ où $L = 10$ m, $\ell = 5,0$ m, $h = 1,5$ m et ρ la masse volumique de l'eau.

....

....

....

....

....

....

Partie n°2: Intégration de fonctions trigo

- ◇ $I_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$
- ◇ $I_2 = \displaystyle\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right)\mathrm{d}t$

....

....

....

....

....

....

....

....

Partie n°3: Nombres complexes

Exprimer le module et l'argument des expressions ci-dessous. Indiquer le module et l'argument quand $x \to 0$ et $x \to \infty$.

- $\underline{H_1} = \dfrac{1}{1 + jx}$,
- $\underline{H_2} = \dfrac{jx}{1 + jx}$,
- $\underline{H_3} = \dfrac{jx}{1 - jx + x^2}$,
- $\underline{H_4} = \dfrac{1}{1 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$.

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, u = 0$ où $Q > \frac{1}{2}$ et $\omega_0 > 0$. CI : $u(0) = E$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Semaine 16

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

◇ $J = \dfrac{1}{2}MR^2$ où $M = 100\ \mathrm{kg}$ et $R = 10\ \mathrm{cm}$.

◇ $v = R\omega$ où $R = 10\ \mathrm{cm}$ et ω la pulsation. On donne la vitesse angulaire $N = 3000\ \mathrm{tr/min}$.

....

....

....

....

....

....

Partie n°2: Fonctions trigonométriques

Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos(\theta)$ et/ou $\sin(\theta)$.

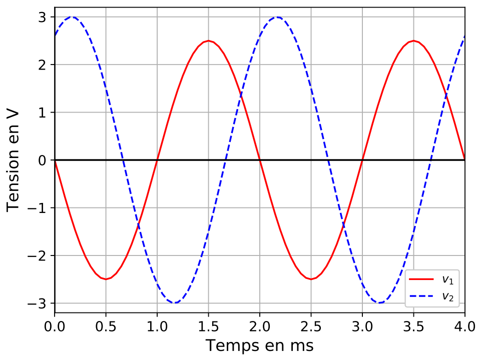
◇ $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) =$

◇ $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) =$

◇ $\cos(\pi - \theta) =$

◇ $\sin(\pi + \theta) =$

Partie n°3: Signaux sinusoïdaux



On considère les 2 tensions sinusoïdales représentées ci-contre.

1. Pour chaque signal relever l'amplitude, la période, la fréquence.

2. La tension v_2 est-elle en avance ou en retard par rapport à la tension v_1 ? Calculer le déphasage $\varphi_{2/1}$.

3. Pour chaque signal calculer la phase à l'origine. Vérifier la cohérence des résultats avec la question précédente.

4. Indiquer la forme analytique de chaque signal.

....

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, u = 0$ où $Q < \frac{1}{2}$ et $\omega_0 > 0$. CI : $u(0) = E$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Semaine 17

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ où $k = 6,0.10^4\ \mathrm{N/m}$, $M = 7,8\ \mathrm{kg}$ et $m = 3,2\ \mathrm{kg}$.
- $g = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}$ où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle, M_T la masse de la Terre, et R_T le rayon de la Terre.

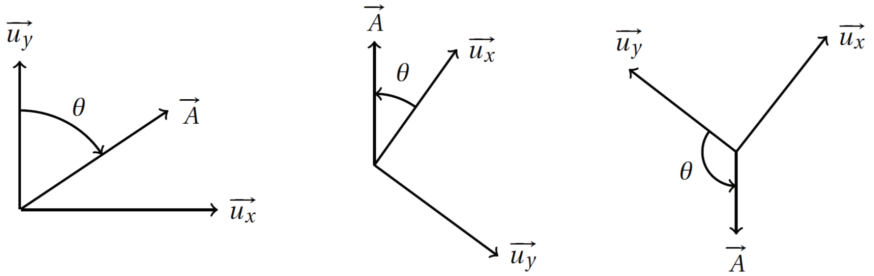
Partie n°2: Nombres complexes

Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire, puis le module et l'argument des expressions ci-dessous.

- $\underline{z_1} = \dfrac{1+j}{j}$,
- $\underline{z_2} = \dfrac{1}{1-j}$,
- $\underline{z_3} = \dfrac{-2+j}{2+j}$,
- $\underline{z_4} = \dfrac{\sqrt{3}+j}{2j}$.

Partie n°3: Produit scalaire

Dans chacun des cas ci-contre, exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.



Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, u = 0$ où $Q = \frac{1}{2}$ et $\omega_0 > 0$. CI : $u(0) = E$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Semaine 18

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $v = \dfrac{F\Delta t}{m}$ où $F = 250$ N, $\Delta t = 20$ ms et $m = 453$ g.
- $J = \dfrac{1}{12} ML^2$ où $M = 10$ kg et $L = 3,1$ m.
- $v = \sqrt{2gd\sin(\alpha)}$ où g est l'accélération de la pesanteur, $d = 2$ m et $\alpha = 15°$.

Partie n°2: Produit scalaire

On considère une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Calculer dans chaque cas le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, puis l'angle entre les 2 vecteurs.

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

2. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$.

4. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

6. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Partie n°3: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,u = \omega_0^2\,E$ où $Q > \frac{1}{2}$ et $\omega_0 > 0$. CI : $u(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Semaine 19

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $v_1 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G} M_T}{R_T}}$ où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle, M_T la masse de la Terre, et R_T le rayon de la Terre.
- $T = T_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ où $T_0 = 1\ \text{jour}$. On donnera le résultat en heures.

....

....

....

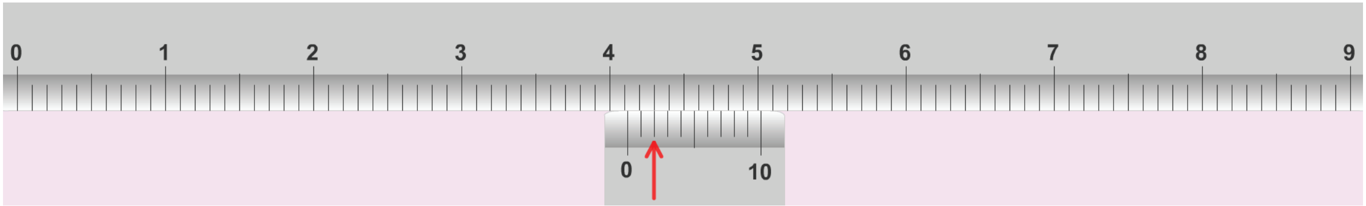
....

....

....

Partie n°2: Lecture au vernier

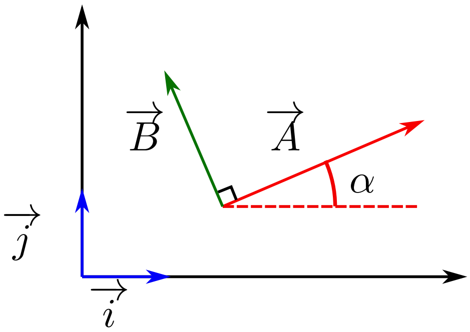
Indiquer la grandeur mesurée en mm. Les graduations principales indiquent des cm.



....

....

Partie n°3: Projection



Exprimer les produits scalaires suivants :

- $\vec{A}.\vec{i}$
- $\vec{B}.\vec{j}$
- $\vec{j}.\vec{A}$
- $\vec{A}.\vec{B}$
- $\vec{B}.\vec{i}$
- $\left(\vec{A}+\vec{B}\right).\vec{i}$.

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, u = \omega_0^2\, E$ où $Q < \frac{1}{2}$ et $\omega_0 > 0$. CI : $u(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Semaine 20

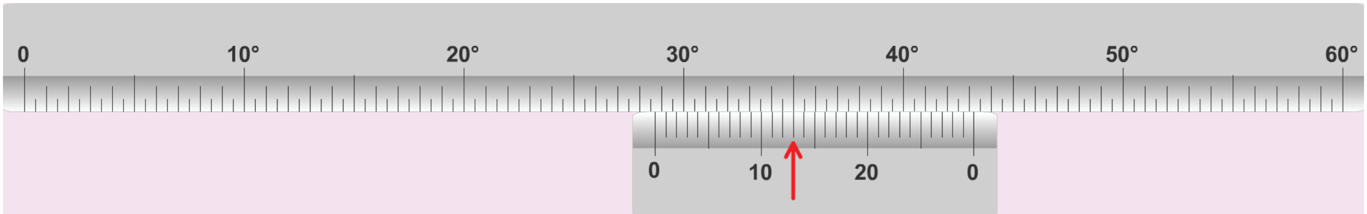
Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $m = \dfrac{PV}{RT}M$ où $P = 0,312$ bar, $V = 10$ L, R la constante des gaz parfaits, $T = 70$ °C et $M = 18$ g/mol.
- $a = \left(\dfrac{k_B T}{P}\right)^{1/3}$ où k_B est la constante de Boltzman, $T = 273$ K, $P = 1$ atm.

Partie n°2: Lecture au vernier

Indiquer l'angle α mesuré en °. Puis convertir cet angle en radian (avec une calculatrice). On sera particulièrement vigilant aux chiffres significatifs.



Partie n°3: Produit vectoriel

On considère une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer dans chaque cas le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

1. $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

4. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

6. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, u = \omega_0^2\, E$ où $Q = \frac{1}{2}$ et $\omega_0 > 0$. CI : $u(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Semaine 21

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- ◇ $v = \sqrt{\dfrac{3k_BT}{m}}$ où k_B est la constante de Boltzman, $T = 27\ °\mathrm{C}$ et $m = 5,3.10^{-26}\ \mathrm{kg}$.
- ◇ $H = \dfrac{RT_0}{Mg}$ où R est la constante des gaz parfaits, $T_0 = 0\ °\mathrm{C}$ et $M = 29\ \mathrm{g/mol}$.

....

....

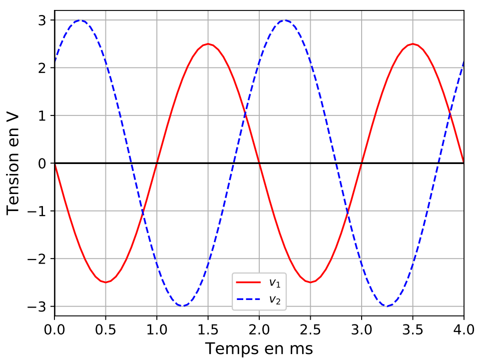
....

....

....

....

Partie n°2: Signaux sinusoïdaux



On considère les 2 tensions sinusoïdales représentées ci-contre.

1. Pour chaque signal relever l'amplitude, la période, la fréquence.

2. La tension v_2 est-elle en avance ou en retard par rapport à la tension v_1 ? Calculer le déphasage $\varphi_{2/1}$.

3. Pour chaque signal calculer la phase à l'origine. Vérifier la cohérence des résultats avec la question précédente.

4. Indiquer la forme analytique de chaque signal.

....

....

....

....

....

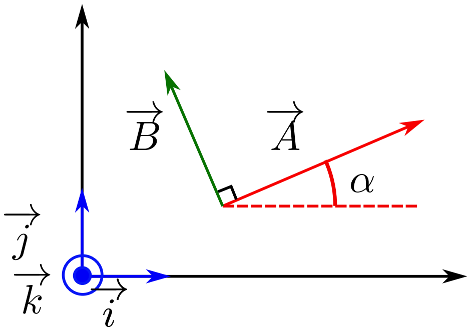
....

....

....

....

Partie n°3: Produit vectoriel



On considère la base directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Exprimer les produits vectoriels suivants :

- $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{i}$
- $\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{j}$
- $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{j}$
- $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$
- $\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{i}$
- $\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) \wedge \overrightarrow{i}$.

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x = g \quad \text{où } Q = 6 \text{ et } \omega_0 > 0. \qquad \text{CI : } x(0) = 0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0.$$

Semaine 22

Partie n°1: Applications numériques

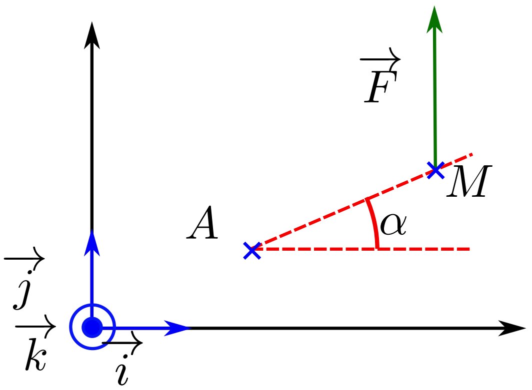
Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $m = \frac{PV}{RT}M$ où $P = 1$ bar, $V = 225$ m^3, R la constante des gaz parfaits, $T = 27$ °C et $M = 29$ g/mol.
- $c_p = \frac{R}{M}\frac{\gamma}{\gamma - 1}$ où R est la constante des gaz parfaits, $M = 29$ g/mol et $\gamma = 1,4$.
- $\eta = \frac{273}{293 - 273}$

Partie n°2: Linéariser les expressions suivantes

- $A = 2\cos^2(\theta) - 3\sin^2(\theta) - 4$
- $B = \sin(\theta)\cos(\theta) - 5\cos^2(\theta)$

Partie n°3: Produit vectoriel



Exprimer le produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}$ en utilisant le bras de levier. Vérifier le résultat en exprimant $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ puis en calculant le produit vectoriel.

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.
$\ddot{x} - \Omega_0^2\, x = 0$ CI : $x(0) = d$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Semaine 23

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

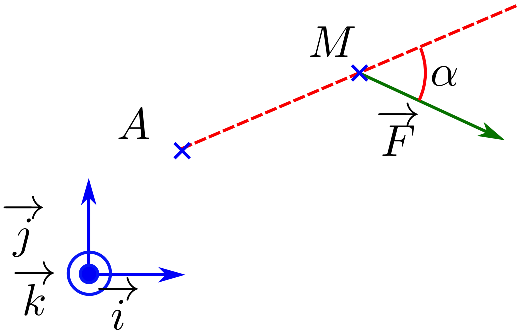
- $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, $I = 1\ \mathrm{A}$, $r = 2\ \mathrm{cm}$.
- $Q = \dfrac{15}{0,59}$ (sans unité).
- $\rho = 0,74 \times \left(1 - \dfrac{290}{1450}\right)$.

Partie n°2: Formules de trigo

Factoriser les expressions suivantes :

- $A = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
- $B = S_0 \sin(\omega t + kx) + S_0 \sin(\omega t - kx)$
- $C = S_0 \cos(\omega t + kx) - S_0 \cos(\omega t - kx)$

Partie n°3: Produit vectoriel



Exprimer le produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}$ en utilisant le bras de levier. Vérifier le résultat en exprimant $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ puis en calculant le produit vectoriel.

....

....

....

....

Partie n°4: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2 X_0$ où $Q = 6$ et $\omega_0 > 0$. CI : $x(0) = X_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$.

....

....

....

....

....

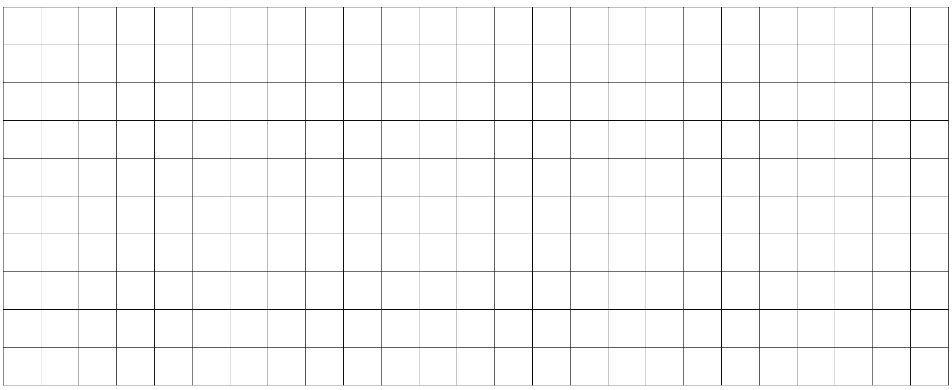
....

....

....

....

....



Semaine 24

Partie n°1: Applications numériques

Faire les applications numériques suivantes (sans oublier l'unité).

- $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}}$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, $\sigma = 5,9.10^7\ \mathrm{S/m}$ la conductivité électrique du cuivre et $f = 50\ \mathrm{Hz}$.
- $S = -\dfrac{25}{1450} + \dfrac{10}{190}$ en $\mathrm{J/K}$.

Partie n°2: Résolution d'équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle suivante, et tracer l'évolution temporelle de la solution.

$\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x = \omega_0^2 X_0$ où $Q = 1\ 3$ et $\omega_0 > 0$. CI : $x(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.