Ex 3 Fuite d'hélium

On considère une bouteille de volume constant $V_0 = 10\ \mathrm{L}$ contenant de l'hélium, modélisé comme un gaz parfait monoatomique, à la pression $p_0 = 2,1\ \mathrm{bar}$ et à la température $T_0 = 300\ \mathrm{K}$.

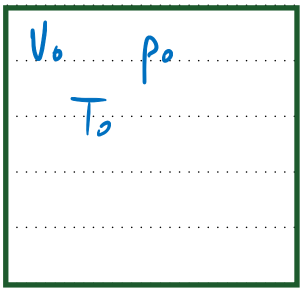
Données : masse molaire de l'hélium $M = 4,0\ \mathrm{g/mol}$, constante de Boltzmann $k_B = 1,38.10^{23}\ \mathrm{J/K}$.

1. Calculer la masse m d'hélium contenue dans la bouteille et la densité particulaire $n^\star$, c'est-à-dire le nombre d'atomes par unité de volume.

2. Calculer la vitesse quadratique moyenne des atomes.

3. À la suite de l'ouverture de la bouteille, la pression passe à $p_1 = 1,4\ \mathrm{bar}$ et la température à $T_1 = 290\ \mathrm{K}$. Calculer la masse Δm de gaz qui s'est échappé de la bouteille.

4. À quelle température T_2 faudrait-il porter le gaz pour atteindre à nouveau la pression p_0 ?



① Masse d'Hélium :

* quantité de matière : n

GP : $p_0 V_0 = n R T_0$

et $m = M \times n$

$$\boxed{m = \frac{M p_0 V_0}{R T_0}}$$

AN : $m = \dfrac{\cancel{4\times 2,1}\cdot 10^5 \cdot 10 \times 10^{-3}}{\cancel{8,3} \times 300}$ $\quad m = 3,4\ \mathrm{g}$

* densité particulaire

$n^* = \dfrac{n\, N_a}{V_0}$ et $n = \dfrac{p_0 V_0}{R T_0}$

$$\boxed{n^* = \frac{p_0 N_a}{R T_0}}$$

$n^* = \dfrac{2,1 \cdot 10^5 \times 6 \cdot 10^{23}}{8,3 \times 300} = \dfrac{2 \times 2,1}{8,3} \times 10^{26}$

$n^* = 5 \cdot 10^{25}$ atomes $/ m^3$

② Vitesse quadratique moyenne

On repart de la définition de la température cinétique :

$\frac{1}{\cancel{2}} m u^2 = \frac{3}{\cancel{2}} k_B T_0$ masse d'un atome $m = \dfrac{M}{N_a}$

$$u^2 = 3 \underbrace{k_B \mathcal{N}_a}_{=R} \frac{T}{\Pi} \qquad \boxed{u = \sqrt{3 \frac{RT}{\Pi}}}$$

$$u = \sqrt{3 \times \frac{8{,}3 \times 300}{4 \times 10^{-3}}} = \sqrt{2 \cdot 10^6} \qquad \underline{u = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ m/s}}$$

③ Variation de masse :

GP : $P_1 V_0 = n_1 R T_1$ et $n_1 = \frac{m_1}{\Pi}$

$$\Delta m = m - m_1$$

$$\Delta m = \frac{\Pi p_0 V_0}{R T_0} - \frac{\Pi p_1 V_0}{R T_1} \qquad \boxed{\Delta m = \frac{\Pi V_0}{R}\left(\frac{p_0}{T_0} - \frac{p_1}{T_1}\right)}$$

$$\Delta m = \frac{4 \times 10 \cdot 10^{-3}}{8{,}3}\left(\underbrace{\frac{2{,}1}{300}}_{7 \cdot 10^{-3}} - \underbrace{\frac{1{,}4}{290}}_{5 \cdot 10^{-3}}\right) \times 10^5 \qquad \underline{\Delta m = 1\text{ g}}$$

④ Température T_2

GP : $P_1 V_0 = n_1 R T_1$

On souhaite atteindre la pression p_0 : $p_0 V_0 = n_1 R T_2$

On fait le rapport des 2 expressions :

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{n_1 R T_2}{n_1 R T_1} \qquad \boxed{T_2 = \frac{p_0}{p_1} T_1}$$

$$T_2 = \frac{2{,}1}{1{,}4} \times 290 \qquad T_2 = \frac{3}{2} \times 290$$

$$\underline{T_2 = 435 \text{ K}}$$