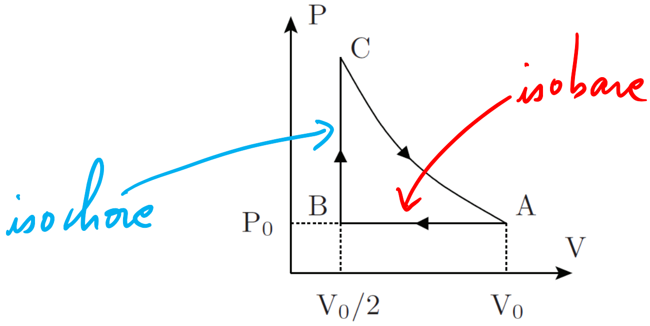
Ex 4 Rendement d'un cycle

Un système constitué par n moles de gaz parfait de coefficient γ suit le cycle défini dans le diagramme de Watt ci-dessous. la phase CA est une détente adiabatique réversible. Dans l'état A, la température est T_0.



1. Exprimer les températures T_B et T_C en fonction de T_0.

2. Quelle est la nature de cette machine thermique ? Définir son rendement η en fonction des différents échanges énergétiques ayant lieu au cours du cycle.

3. Exprimer le rendement η en fonction de γ et des températures T_0, T_B et T_C puis en fonction de γ uniquement. Calculer η.

4. Quelles sont les températures de la source chaude et de la source froide avec lesquelles les échanges thermiques se font en supposant que le cycle est ditherme ? En déduire le rendement maximal que l'on peut espérer atteindre.

1) Expression de T_B et T_C

Gaz Parfait : en A : $P_0 V_0 = nRT_0$
en B : $P_0 \frac{V_0}{2} = nRT_B$ $\Big\}$ $\frac{T_B}{T_0} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{T_B = \frac{T_0}{2}}$$

en C : $P_C \frac{V_0}{2} = nRT_C$ (mais on ne connaît pas P_C).

C → A : adiabatique réversible + GP + γ = cste

Loi de Laplace : $P_C V_C^\gamma = P_A V_A^\gamma$

On passe en variable (T, V) : $T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$

$$T_C \left(\frac{\cancel{V_0}}{2}\right)^{\gamma-1} = T_0 \cancel{V_0}^{\gamma-1} \qquad \boxed{T_C = 2^{\gamma-1} T_0}$$

② Sens horaire : le travail récupéré lors de la détente est supérieur à celui nécessaire à la compression.

$\Rightarrow$ Cycle moteur

Par définition : $\eta = \dfrac{-W}{Q_c}$

$-W \rightarrow$ travail récupéré sur le cycle.

$Q_c \rightarrow$ transfert thermique reçu de la part de la source chaude

1er ppe appliqué au fluide sur le cycle : $\underbrace{\Delta U_{cycle}}_{0} = W + Q_{AB} + Q_{BC} + \underbrace{\cancel{Q_{CA}}}_{=0}$ adiab.

d'où $W = -Q_{AB} - Q_{BC}$

* $\underline{A \rightarrow B}$: $T_B = \dfrac{T_0}{2}$. Le fluide est en contact avec la source froide

Transformation monobare + 2e LJ + GP $\quad \Delta H_{AB} = Q_{AB} = \dfrac{nR\gamma}{\gamma - 1}(T_B - T_0) < 0$

Q_{AB} est bien le transfert thermique reçu de la source froide.

* $\underline{B \rightarrow C}$: $T_C > T_0$: fluide en contact avec la source chaude.

Transf. isochore + 1er ppe au fluide + 1ère LJ $\quad \Delta U_{BC} = Q_{BC}$

$$Q_{BC} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B) > 0$$

Bilan : $\eta = \dfrac{Q_{AB} + Q_{BC}}{Q_{BC}}$ $\quad \boxed{\eta = 1 + \dfrac{Q_{AB}}{Q_{BC}}}$

③ Rendement : $Q_{BC} = \frac{nR}{\gamma - 1}\left(2^{\gamma-1}T_0 - \frac{T_0}{2}\right)$

$$\boxed{Q_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1}\,\frac{T_0}{2}\left(2^{\gamma}-1\right)}$$

$Q_{AB} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{T_0}{2} - T_0\right)$ $\qquad$ $\boxed{Q_{AB} = \frac{-nR\gamma}{\gamma-1}\,\frac{T_0}{2}}$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{\frac{\cancel{nR}\gamma}{\cancel{\gamma-1}} \times \cancel{\frac{T_0}{2}}}{\frac{\cancel{nR}}{\cancel{\gamma-1}} \times \cancel{\frac{T_0}{2}}\left(2^{\gamma}-1\right)}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\gamma}{2^{\gamma}-1}}$$

avec $\gamma = 1,4$ $\quad \eta = 0,15$

④ Température de la source chaude : $T_C = 2^{\gamma-1}\,T_0$

froide : $T_B = \frac{T_0}{2}$

Rendement max = rendement de Carnot :

$$\eta = 1 - \frac{T_B}{T_C} \qquad \eta = 1 - \frac{\cancel{T_0}}{2\,\cancel{T_0}\,2^{\gamma-1}}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{2^{\gamma}}}$$

avec $\gamma = 1,4$ $\quad \eta = 0,62$