Ex 10 Décomposition du contact thermique

Un solide de capacité thermique C initialement à la température T_0 est amené à la température T_F en étant placé successivement au contact de N thermostats dont les températures T_i s'échelonnent régulièrement de T_0 à T_N. On attend l'équilibre thermique avec chaque thermostat soit réalisé avant de passer au thermostat suivant.

On donne : $C = 400$ J/K, $T_0 = 300$ K et $T_F = 350$ K.

1. En notant T_i la température du ième thermostat (où i varie de 1 à N), exprimer l'écart de température entre deux thermostats successifs en fonction de T_0, T_F et N.

2. Exprimer S_{ei} l'entropie échangée lors de la ième étape où au contact avec le thermostat de température T_i il passe de la température T_{i-1} à la température T_i. En déduire l'entropie créée S_{ci} lors de cette ième étape.

3. Exprimer l'entropie créée S_c lors de la transformation totale en fonction de C, T_0, T_F et N. Calculer S_c pour $N = 1$, $N = 2$, $N = 10$ et $N = 100$. Commenter.

On cherche à déterminer si on peut rendre la transformation réversible en passant à la limite $N \to \infty$. Dans le cas où N est très grand devant 1, on pose $\theta = \dfrac{T_F - T_0}{N}$.

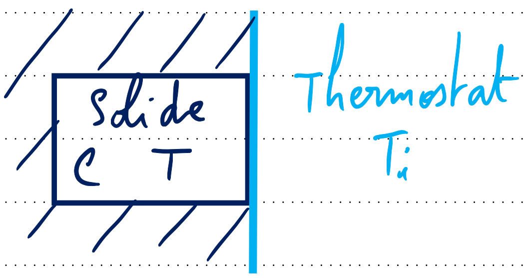
4. Exprimer l'entropie créée S_{ci} en fonction de C, θ et T_{i-1}.

5. Que devient l'expression de l'entropie créée S_c quand $N \gg 1$? On donnera le résultat en fonction de C, T_0, T_N et N.

6. Montrer que

$$S_{ci} \leq \frac{C}{2N^2}\frac{(T_F - T_0)^2}{T_0^2}.$$

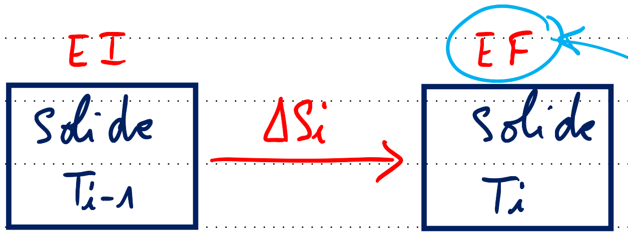
En déduire un majorant de S_c pour la transformation totale. Que peut-on dire à la limite $N \to \infty$.



① Ecart de température : $\boxed{T_i - T_{i-1} = \dfrac{T_F - T_0}{N}}$

② Entropie échangée S_{ei}

$$S_{ei} = \int \frac{\delta Q_i}{T_i} = \frac{Q_i}{T_i}$$



équilibre thermique

Solide en contact avec le thermostat T_i

1er ppe au solide $V = cst$ phase condensée :

$\Delta U_i = \underbrace{\cancel{W_i}}_{0} + Q_i$ $\Delta U_i = C(T_i - T_{i-1})$

d'où $Q_i = C(T_i - T_{i-1}) = \dfrac{C}{N}(T_F - T_0)$

$$\boxed{S_{ei} = C\,\frac{(T_i - T_{i-1})}{T_i}}$$

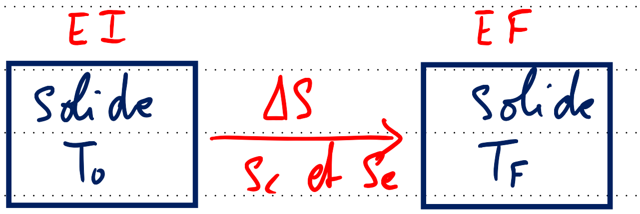
Pour calculer l'entropie créée, on doit au préalable exprimer la variation d'entropie ΔS_i :

Fonction d'état + phase condensée : $\boxed{\Delta S_i = C \ln\left(\dfrac{T_i}{T_{i-1}}\right)}$

2e principe au solide : $\Delta S_i = S_{ei} + S_{ci}$

$$\boxed{S_{ci} = C \ln\left(\frac{T_i}{T_{i-1}}\right) - C\,\frac{T_i - T_{i-1}}{T_i}}$$

③ Entropie créée



Mise en contact avec les N thermostats successifs.

On somme toutes les entropies créées : $S_c = \sum_{i=1}^{N} S_{ci}$

$$S_c = \sum_{i=1}^{N} c \ln\left(\frac{T_i}{T_{i-1}}\right) - \sum_{i=1}^{N} c \, \frac{T_i - T_{i-1}}{T_i}$$

$T_i - T_{i-1} \rightarrow \frac{T_F - T_0}{N}$

$T_i \rightarrow T_0 + i \, \frac{T_F - T_0}{N}$

$\sum_{i=1}^{N} c \ln\left(\frac{T_i}{T_{i-1}}\right) = c \ln\left(\frac{T_N}{T_0}\right)$ et $T_N = T_F$

somme des entropies échangées S_{ei}

$$\boxed{S_c = c \ln\left(\frac{T_F}{T_0}\right) - c \, \frac{T_F - T_0}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T_0 + i \, \frac{T_F - T_0}{N}}}$$

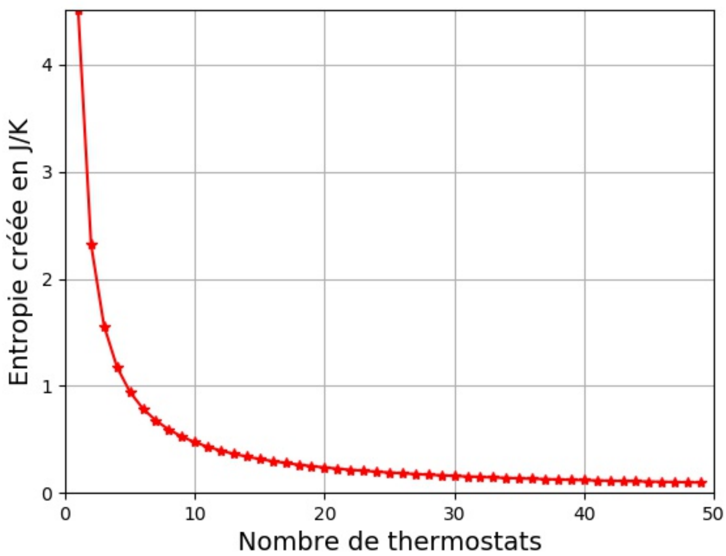
→ on retrouve la variation d'entropie ΔS de l'EI à l'EF.

Pour les AN, le plus simple est de faire le calcul avec Python :

N	1	2	10	100
S_c (J/K)	4,5	2,3	0,48	$4{,}8 \cdot 10^{-2}$

Plus on augmente N c'est-à-dire le nb de thermostats plus l'entropie créée diminue.

⇒ l'irréversibilité est de moins en moins grande.



④ Entropie créée : $S_{ci} = C \ln\left(\frac{T_i}{T_{i-1}}\right) - C\,\frac{T_i - T_{i-1}}{T_i}$

et $\theta = \frac{T_F - T_0}{N}$ $\qquad \theta = T_i - T_{i-1}$

On doit éliminer T_i dans S_{ci} : $T_i = \theta + T_{i-1}$

$$\boxed{S_{ci} = C \ln\left(\frac{\theta + T_{i-1}}{T_{i-1}}\right) - C\,\frac{\theta}{\theta + T_{i-1}}}$$

⑤ $N \gg 1$. On aura alors $T_{i-1} \gg \theta$ $\qquad \left|\frac{\theta}{T_{i-1}}\right| \ll 1$

$$S_{ci} = C \ln\left(1 + \frac{\theta}{T_{i-1}}\right) - C\,\frac{\theta/T_{i-1}}{1 + \frac{\theta}{T_{i-1}}}$$

On fait un developpement limité de l'expression à l'ordre 2
($S_{ci} = 0$ à l'ordre 1)

$$\begin{cases} \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} \\[2mm] \dfrac{x}{1+x} = x(1-x) \end{cases}$$

$$S_{ci} = C\left(\cancel{\frac{\theta}{T_{i-1}}} - \frac{\theta^2}{2T_{i-1}^2} - \cancel{\frac{\theta}{T_{i-1}}} + \frac{\theta^2}{T_{i-1}^2}\right) = C\,\frac{\theta^2}{2T_{i-1}^2}$$

$$\boxed{S_{ci} = C\,\frac{\theta^2}{2T_{i-1}^2}} \qquad \boxed{S_{ci} = \frac{C}{2N^2}\,\frac{(T_F - T_0)^2}{T_{i-1}^2}}$$

⑥ Comme $T_0 \leq T_i \quad \forall i \qquad \frac{1}{T_0} \geq \frac{1}{T_i} \quad \forall i$

On peut donc majorer S_{ci} :

$$\boxed{S_{ci} \leq \frac{C}{2N^2} \frac{(T_F - T_0)^2}{T_0^2}}$$

Entropie créée lors du contact avec les N thermostats successifs :

$$S_c = \sum_{i=1}^{N} S_{ci} \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{C}{2N^2} \frac{(T_F - T_0)^2}{T_0^2}$$

$$\boxed{S_c \leq \frac{C}{2N} \frac{(T_F - T_0)^2}{T_0^2}}$$

Comme d'après le 2nd pc $S_c \geq 0$

on aura $\boxed{S_c \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0}$

La transformation tend vers une transformation réversible quand N le nb de thermostats tend vers l'infini.